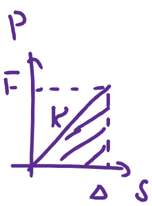
Deflection Energy1

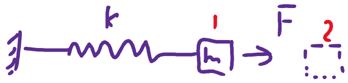
Thursday, November 23, 2023 8:26

محاسبه تغییر شکل‌ها به روش‌های انرژی

روش‌های انرژی برای محاسبه تغییر شکل‌ها عبارتند از:

- روش کار حقیقی
- روش بار واحد (روش کار مجازی)
- روش کاستیلیانو
- قانون بتی و قانون ماکسول





$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_s$$

$$\frac{1}{2} F \Delta = \frac{1}{2} k \Delta^2$$

روش کار حقیقی

بنابر اصل بقای انرژی، کار انجام شده توسط بارهای خارجی برابر است با کار انجام شده توسط نیروهای داخلی (انرژی کرنشی ذخیره شده در اعضای سازه)

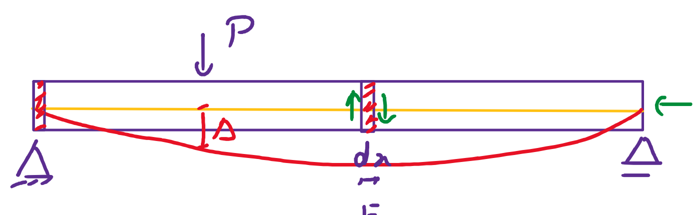
$$W_{ext} = (W_{int} = U)$$

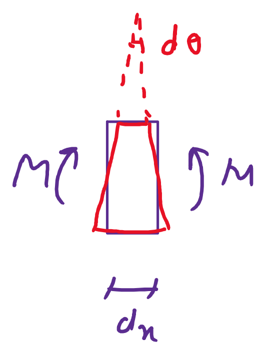
به طور مثال برای یک تیر کار خارجی و انرژی کرنشی ذخیره شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

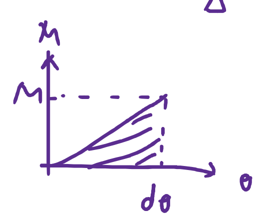
$$W_{ext} = \frac{1}{2} P \Delta$$

$$dW_{int} = \frac{1}{2} M\, d\theta = \frac{1}{2} M \left(\frac{M}{EI} dx\right)$$

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

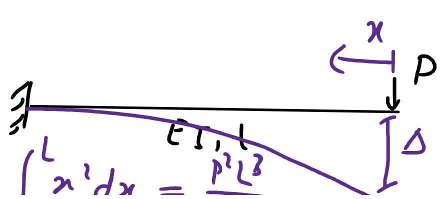






$$\frac{d\theta}{dx} = y'' = \frac{M}{EI}$$

مثال: تغییر مکان قائم سر آزاد تیر زیر را به دست آورید.



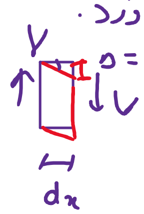
$$\begin{cases} W_{ext} = \frac{1}{2} P \Delta \\ W_{int} = U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{\ldots} \int_0^L \frac{(-Px)^2}{\ldots} dx = \frac{P^2}{\ldots} \int_0^L x^2 dx = \frac{P^2 L^3}{\ldots} \end{cases}$$

$$W_{int} = U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(-Px)^2}{EI}dx = \frac{P^2}{2EI}\int_0^L x^2 dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{P}\Delta = \frac{P^{\cancel{2}}L^3}{6EI} \rightarrow \boxed{\Delta = \frac{PL^3}{3EI}}$$

* انرژی کرنش ناشی از سایر نیروها (نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر پیچشی) را نیز می توان به روش مشابه بدست آورد.

$$U = U_{\text{خمش}} + U_{\text{نیروی محوری}} + U_{\text{برش}} + U_{\text{پیچش}}$$

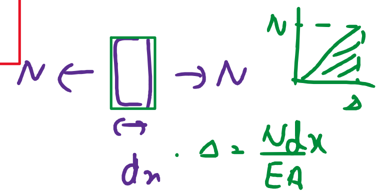


$\Delta = \gamma dx$

$V\gamma dx$

$V\frac{\tau}{G}dx = \frac{V}{G}\frac{V}{A}$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2dx}{EI} + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2dx}{EA} + \frac{1}{2}k\int_0^L \frac{V^2dx}{GA} + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2dx}{JG}}$$

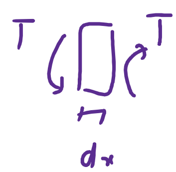


$\Delta = \frac{Ndx}{EA}$

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$\tau \cong \frac{V}{A}$

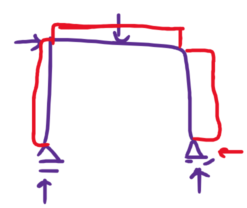
* K در مقاطع مستطیلی برابر 1.2 ، در مقاطع دایره ای برابر $\frac{10}{9}$ و در مقاطع I شکل برابر 1 است.



$d\varphi = \frac{Tdx}{GJ}$

$$\boxed{U = \sum_i \frac{1}{2}\frac{N_i^2 L_i}{E_i A_i}}$$ خرپاها

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx}$$ تیرها و قاب ها



* دامنه کاربرد روش کار حقیقی، بسیار محدود است و در تحلیل سازه به ندرت استفاده می شود. چرا که این روش فقط تغییر مکان زیر بار متمرکز را می دهد.

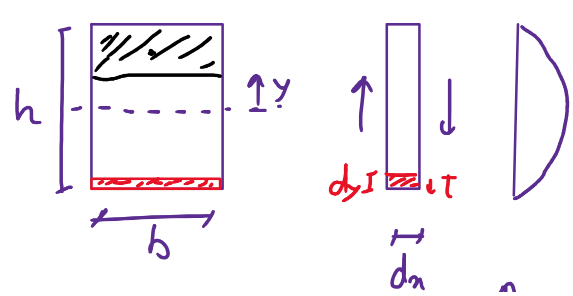
انرژی کرنش ناشی از برش

$$U = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau^2}{G} b\, dy\, dx$$

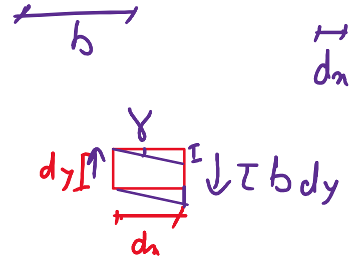
$$Q = b\left(\frac{h}{2}-y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)$$

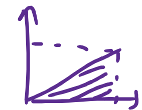
$$Q = \frac{b}{8}(h^2-4y^2)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{VQ}{Ib}\right)^2 \frac{b}{G}\, dy\, dx = \frac{1}{2}\frac{V^2 dx}{I^2 b G}\int Q^2 dy$$



$$\ldots \frac{}{2}\int_{-\frac{h}{2}} \left(\frac{\ }{Ib}\right) \frac{\ }{G} \ldots \qquad \frac{\ }{2I^2bG} \int Q^2 \ldots$$





$$\int_{-h/2}^{h/2} Q^2 dy = \int \left(\frac{b}{8}\right)^2 (h^2-4y^2)^2 dy =$$

$$dU = (\tau b\, dy)(\gamma\, dx) = \frac{\tau^2}{G} b\, dy\, dx$$

$$\frac{b^2}{64}\int (h^4+16y^4-8h^2y^2)\, dy =$$

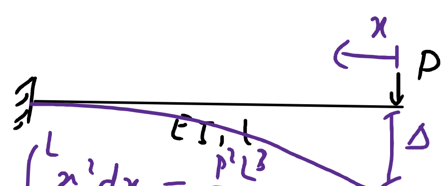
$$\frac{b^2}{64}\left[h^4 y + \frac{16}{5}y^5 - \frac{8h^2}{3}y^3\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b^2}{64}\times 2\left[h^4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{16}{5}\left(\frac{h}{2}\right)^5 - \frac{8h^2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\right] \quad \frac{15+3-10}{30}h^5$$

$$\boxed{\int Q^2 dy = \frac{1}{120} b^2 h^5} \qquad \frac{b^2}{64}\times 2\times\frac{8}{30}h^5 = \frac{1}{120} b^2 h^5$$

$$U = \frac{V^2 dx}{I^2 b G}\int Q^2 dy = \frac{V^2 dx}{I^2 b G}\times \frac{1}{120} b^2 h^5 = \frac{V^2 dx}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)G}\times\frac{1}{10}h^2 = 1.2\,\frac{V^2 dx}{GA}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1.2V^2}{GA} dx}$$

مثال را با درنظر گرفتن تغییر شکل برشی حل کنید.



$$\begin{cases} W_{ext} = \frac{1}{2}P\Delta \\ W_{int} = U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(-Px)^2}{EI}dx = \frac{P^2}{2EI}\int_0^L x^2 dx = \frac{P^2L^3}{6EI} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{P}\Delta = \frac{P^{\cancel{2}}L^3}{6EI} \rightarrow \boxed{\Delta = \frac{PL^3}{3EI}}$$

$$U = U_{\text{خمش}} + U_{\text{برش}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+0.3)}$$

$$U_{\text{برش}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1.2V^2}{GA}dx = \frac{6}{10}\frac{1}{GA}\int_0^L P^2 dx = \frac{6}{10}\frac{P^2L}{GA}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{P}\Delta = \frac{P^{\cancel{2}}L^3}{6EI} + \frac{6}{10}\frac{P^{\cancel{2}}L}{GA} \rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{12}{10}\frac{PL}{GA} = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{18\,EI}{\ldots}\ldots\right) \quad 2.6 \quad \frac{1}{12}h^2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{P}\Delta = \frac{P^{\cancel{2}}L^3}{6EI} + \frac{6}{10}\frac{P^{\cancel{2}}L}{GA} \rightarrow \quad \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6}{5}\frac{PL}{GA} = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{18}{5}\,\overset{2.6}{\frac{E}{G}}\,\overset{\frac{1}{12}h^2}{\frac{I}{A}} \times \frac{1}{L^2}\right)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + 0.78\,\frac{h^2}{L^2}\right)}$$