Deflection Energy13

Thursday, December 21, 2023 14:41

قانون بتی و قانون ماکسول

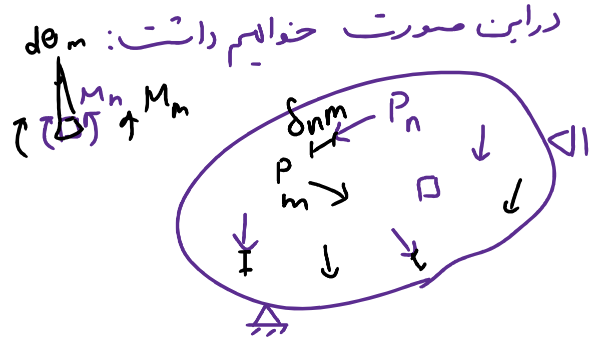
قانون بتی در سال ۱۸۷۲ میلادی توسط انریکو بتی ارائه شد.

برای به دست آوردن این قضیه، سازه شکل زیر را تحت اثر سیستم نیروهای P_n در نظر بگیرید. حال اگر سیستم نیروهای P_m به سازه وارد شود، تغییر مکان ایجاد شده توسط P_m در نقطه اثر P_n با δ_{nm} نشان داده می‌شود.

در این صورت خواهیم داشت:

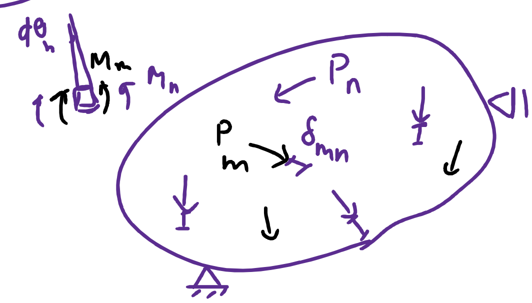
$$W_{ext} = U$$

$$① \quad \sum P_n \delta_{nm} = \int M_n \frac{M_m}{EI} dx$$



حال اگر ابتدا سیستم نیروهای P_m روی سازه موجود باشد سپس سیستم نیروهای P_n را به سازه وارد کنیم، داریم:

$$② \quad \sum P_m \delta_{mn} = \int M_m \frac{M_n}{EI} dx$$



بنابراین از ① و ② داریم:

$$\boxed{\sum P_n \delta_{nm} = \sum P_m \delta_{mn}}$$

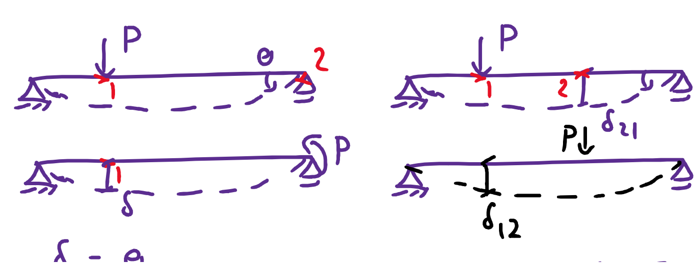
قانون بتی

کار انجام شده توسط سیستم نیروهای P_m به علت تغییر شکل سازه در اثر سیستم نیروهای P_n برابر است با کار انجام شده توسط سیستم نیروهای P_n به علت تغییر شکل سازه در اثر سیستم نیروهای P_m.

قانون ماکسول حالت خاصی از قانون بتی است که در آن فقط یک بار P در دو حالت به سازه وارد می‌شود.

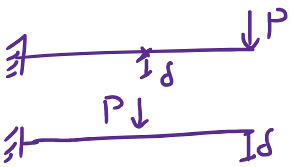
$$\boxed{\delta_{21} = \delta_{12}}$$

قانون ماکسول

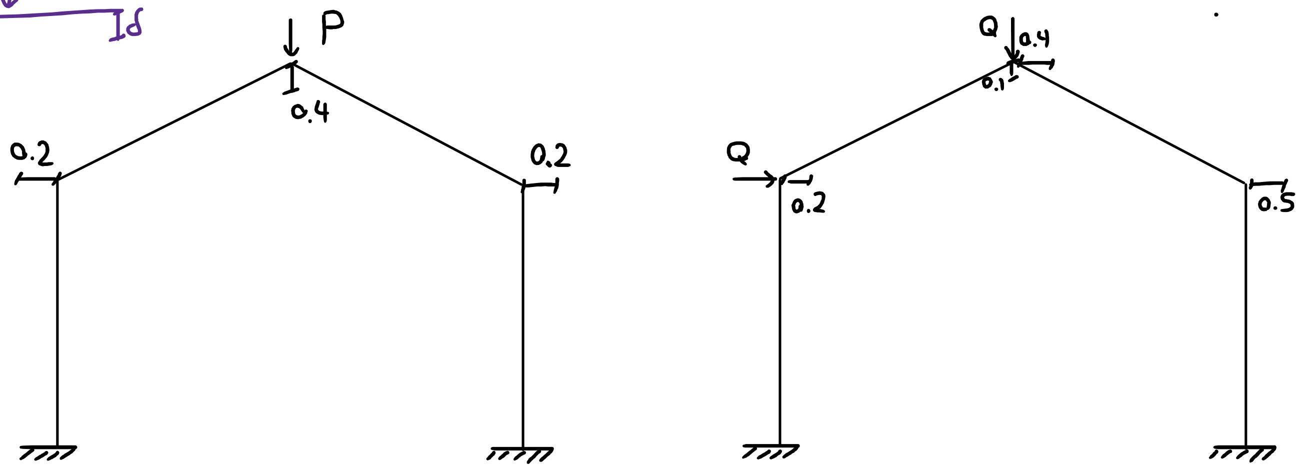


$\delta = \theta$

یعنی تغییر مکان در نقطه ۱ وقتی بار در نقطه ۲ باشد برابر است با تغییر مکان در نقطه ۲ وقتی همان بار در نقطه ۱ اعمال شود.

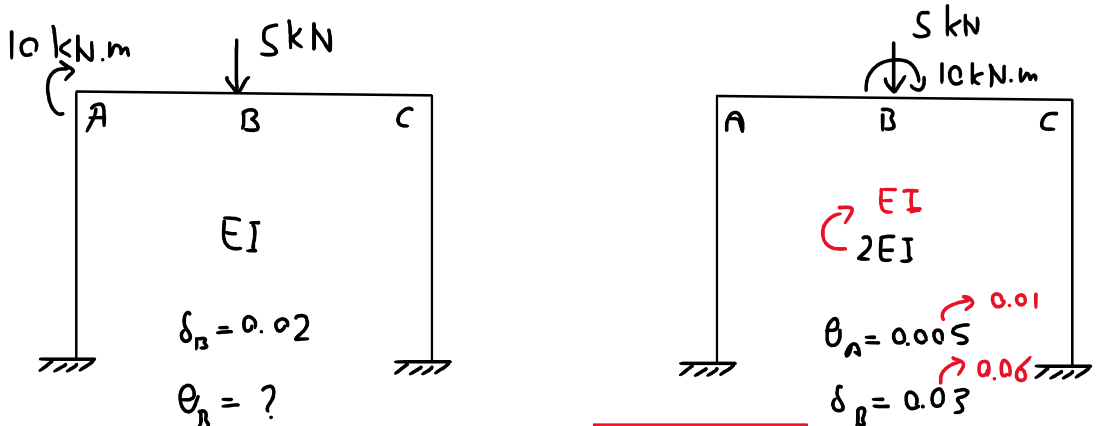


مثال: رابطه P و Q را پیدا کنید.



$$P(0.1) = -Q(0.2) + Q(0.4) \rightarrow \boxed{P = 2Q}$$

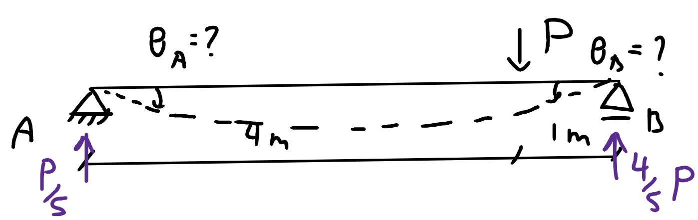
مثال:

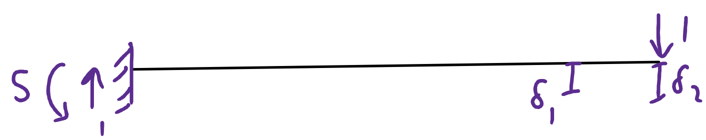


$$10\times 0.01 + 5\times 0.06 = 5\times 0.02 + 10\,\theta_B \rightarrow \boxed{\theta_B = 0.02\ \text{rad}}$$

مثال:

$$\delta_1 = \frac{1\times 4^3}{3EI} + \frac{1\times 4^2}{2EI} = \frac{29.333}{EI}$$

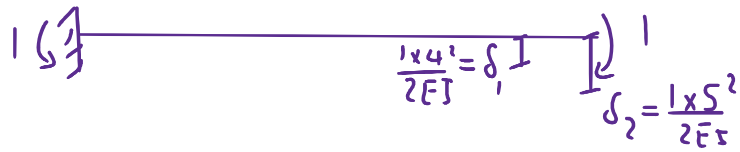




$$\delta_2 = \frac{1\times 5^3}{3EI} = \frac{41.667}{EI}$$

$$(\tfrac{P}{5})(\cancel{0}) + P\delta_1 - (\tfrac{4}{5}P)\delta_2 = 1\times\cancel{0} - 5\theta_A + 1\times\cancel{0}$$

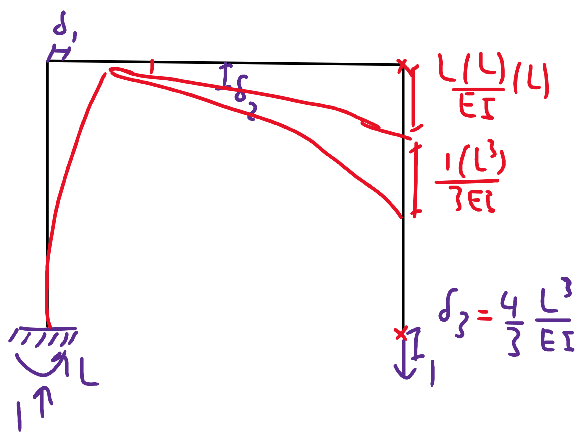
$$P\left(\frac{29.333}{EI}\right) - \left(\frac{4}{5}P\right)\left(\frac{41.667}{EI}\right) = -5\theta_A \rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{4}{5}\frac{P}{EI}}$$

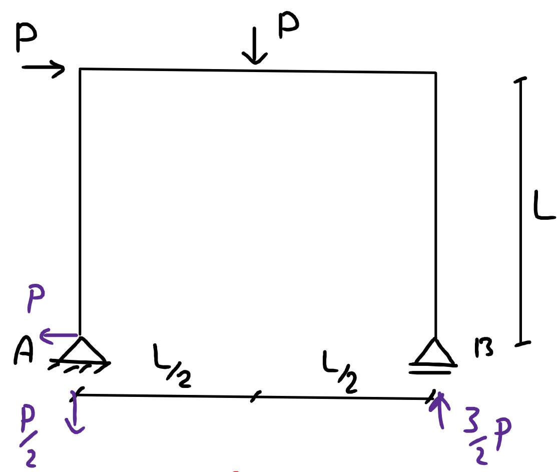


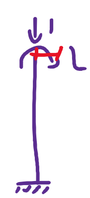
$$P\delta_1 - \left(\frac{4}{5}P\right)\delta_2 = -1\theta_A - 1\theta_B$$

$$P\left(\frac{8}{EI}\right) - \left(\frac{4}{5}P\right)\left(\frac{12.5}{EI}\right) = -\frac{4}{5}\frac{P}{EI} - \theta_B \rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{6}{5}\frac{P}{EI}}$$

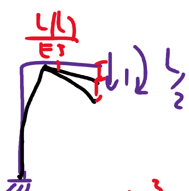
مثال: در قاب شکل زیر θ_A را به کمک قانون بتی به دست آورید.







$\delta_1 = \frac{L(L^2)}{2EI}$



$$L\theta_A = P\delta_1 + P\delta_2 - \frac{3}{2}P\delta_3$$

$$L\theta_A = P\left(\frac{L^3}{2EI}\right) + P\left(\frac{29}{48}\frac{L^3}{EI}\right) - \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}P\left(\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{3}}\frac{L^3}{EI}\right)$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{43}{48}\frac{PL^2}{EI}}$$

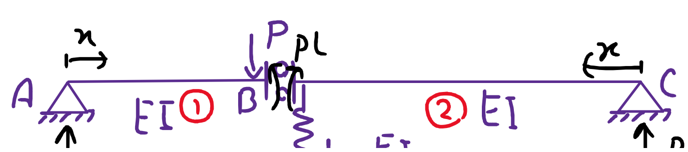
$$\delta_1 = \frac{L^2}{EI}\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1\times(\frac{L}{2})^3}{3EI} + \frac{L\times(\frac{L}{2})^2}{2EI} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{24+2+3}{48} = \frac{29}{48}\frac{L^3}{EI}$$

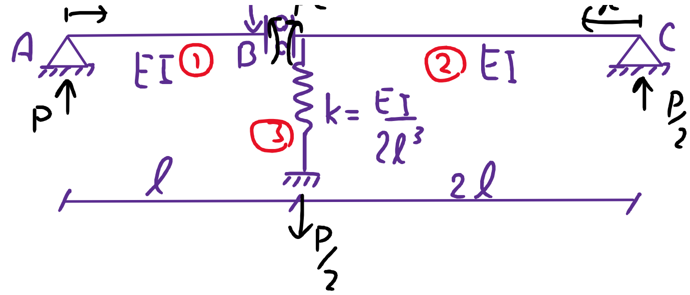
مثال: δ_{BL} و θ_A را با روش کاستیلیانو به دست آورید.

$$\delta_{BL} = \frac{\partial U}{\partial P} \qquad U = \int \frac{M^2}{2EI}dx + \frac{F^2}{2k}$$

$$\delta = \int M\left(\frac{\partial M}{\ }\right)dx + \frac{F}{\ }\left(\frac{\partial F}{\ }\right)$$



$$\boxed{\delta_{BL} = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) dx + \frac{F}{k}\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)}$$



① $M = Px \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x$

② $M = \frac{P}{2}x \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$

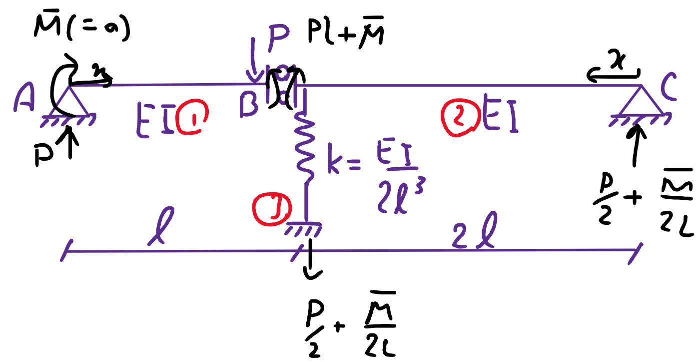
③ $F = \frac{P}{2} \qquad \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{2}$

$$\delta_{BL} = \frac{1}{EI}\int_0^l (Px)(x)\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^{2L}\left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx + \frac{\frac{P}{\cancel{2}}}{\frac{EI}{\cancel{2}l^3}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} + \frac{P}{4}\frac{(2L)^3}{3}\right) + \frac{PL^3}{2EI} = \frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\boxed{\delta_{BL} = \frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial \bar{M}} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}dx + \frac{F}{k}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{M}}\right)$$



① $M = Px + \cancel{\bar{M}}^{\,0} \qquad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = 1$

② $M = \left(\frac{P}{2} + \cancel{\frac{\bar{M}}{2L}}^{\,0}\right)x \qquad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = \frac{x}{2L}$

③ $F = \frac{P}{2} + \cancel{\frac{\bar{M}}{2L}}^{\,0} \qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} = \frac{1}{2L}$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (Px)(1)\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^{2L}\left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{2L}\right)dx + \frac{\frac{P}{\cancel{2}}}{\frac{EI}{\cancel{2}l^3}}\left(\frac{1}{2L}\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^2}{2} + \frac{P}{4L}\frac{(2L)^3}{3}\right] + \frac{PL^2}{2EI} = \frac{5}{3}\frac{PL^2}{EI}$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{5}{3}\frac{PL^2}{EI}\circlearrowright}$$