

تحلیل سازه های نامعین با استفاده از قضیه دوم کاستیلیانو (قضیه انرژی حد اول)

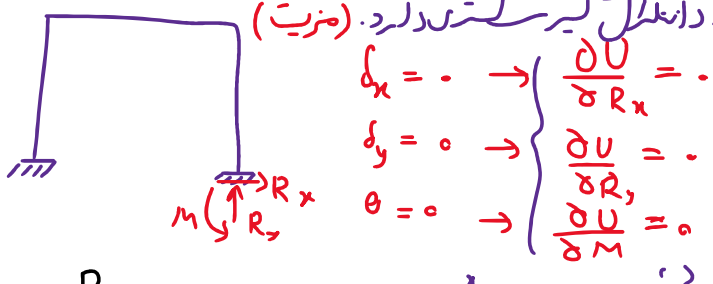
طبق قضیه دوم کاستیلیانو  $\delta \frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n$  است.

در تحلیل سازه های نامعین تبدیلات اضافی، بزرگسای محمول اضافه و تغییر مکان معلوم (معمولاً برابر برعکس) به وجود می آید. بنابراین می توان محمولات اضافی را از معادله  $\frac{\partial U}{\partial P_n} = 0$  به دست آورد.

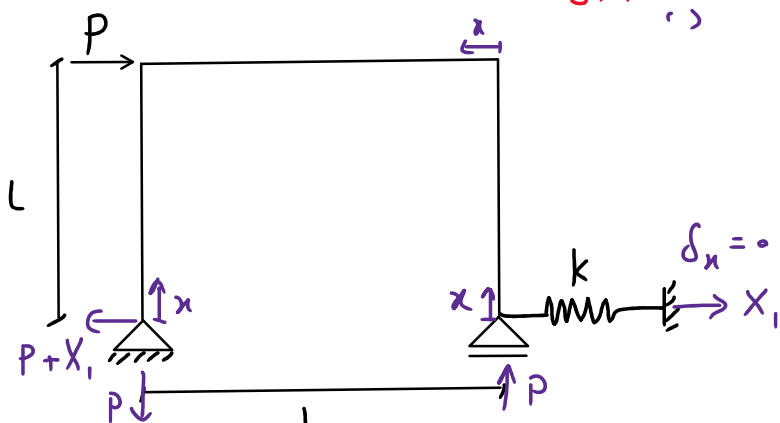
یعنی بزرگسای محمول اضافه باید مقدار برابر بزرگسای در اصل در سازه حد اول شود.

\* در قضیه کاستیلیانو، نسبت تکیه گاه، نقش منفی و تغییر دما نداریم. (محدودیت روش)

\* این روش نسبت به روش سازگاری تغییر شکل ما، تعداد آنالیز بی نهایت دارد. (منزیت)



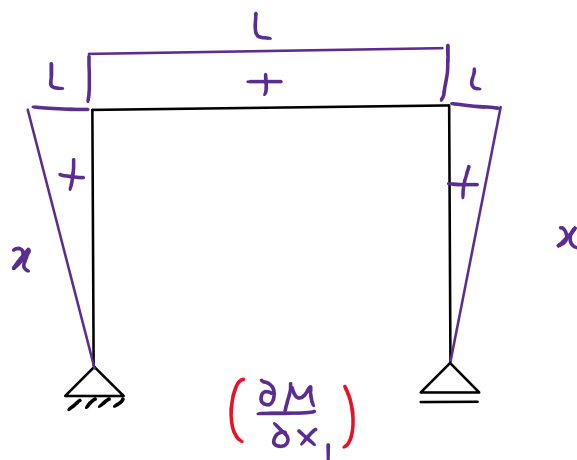
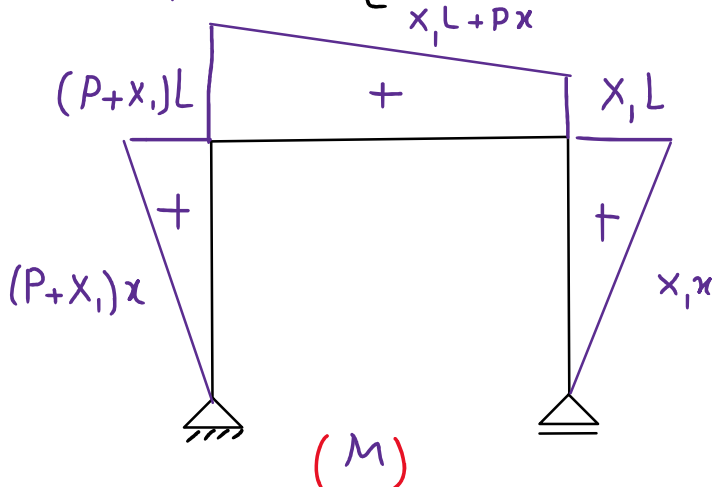
مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه میانه.



$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$

$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$

$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \int \frac{M}{EI} \left( \frac{\partial M}{\partial x_1} \right) dx + \frac{F}{k} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$



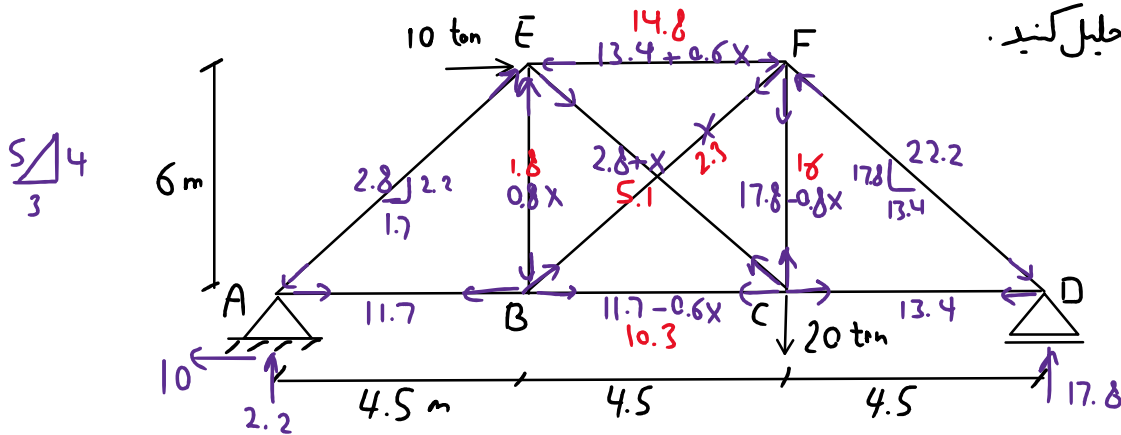
$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \int \frac{M}{EI} \left( \frac{\partial M}{\partial x_1} \right) dx + \frac{F}{k} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$

$$\frac{1}{EI} \left[ \left(\frac{L}{3}\right)(P+x_1)L(L) + \left(\frac{L}{3}\right)(x_1L)(L) + (L)(x_1L + \frac{PL}{2})(L) \right] + \left(\frac{x_1}{k}\right)(L) = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{PL^3}{3} + \frac{x_1L^3}{3} + \frac{x_1L^3}{3} + x_1L^3 + \frac{PL^3}{2} \right] + \frac{x_1}{k} = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{5}{6} PL^3 + \frac{5}{3} x_1 L^3 \right] + \frac{x_1}{k} = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-P}{2 + \frac{6}{5} \left( \frac{EI}{L^3 k} \right)}$$

مثال: خرابی شکل زیر را تحلیل کنید.



$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \rightarrow U = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 L}{EA} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial X} = \sum \frac{N}{EA} \left( \frac{\partial N}{\partial X} \right) L = 0$$

$$\frac{1}{EA} \left[ (-0.8X)(-0.8)(6) + (11.7 - 0.6X)(-0.6)(4.5) + (17.8 - 0.8X)(-0.8)(6) + (-13.4 + 0.6X)(-0.6)(4.5) + (X)(1)(7.5) + (2.8 + X)(1)(7.5) \right] = 0$$

$$-58.86 + 25.92 X = 0 \rightarrow X = 2.3 \text{ ton}$$