Matrix Analysis 1

Wednesday, July 17, 2024 11:46

تحلیل ماتریسی سازه‌ها

① تاریخچه

مبانی تئوری:
- ① روش سازگاری تغییرشکل‌ها : ماکسول 1864
- ② روش شیب-افت : مانی 1915

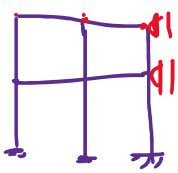
مجهول	معادله
F	$\theta , \delta = 0$
θ , δ	$\Sigma M = 0$ $\Sigma F_h = 0$

← حل هم‌زمان دستگاه معادلات جبری

انتهای دهه 1940 ← اختراع کامپیوتر ← شکل ماتریسی معادلات

② مقایسه روش‌های کلاسیک و تحلیل ماتریسی

- ① معادلات تعادل
- ② معادلات سازگاری ← فرم ماتریسی تا قابل برنامه نویسی
- ③ سختی اعضا



چرا تحلیل کلاسیک؟
- ① فهم رفتار سازه
- ② تحلیل سازه‌های کوچک
- ③ چک کردن تحلیل‌های کامپیوتری
- ④ تحلیل تقریبی و طراحی اولیه
- ⑤ تعیین رابطه نیرو-تغییرمکان

- ① سیستماتیک ← الگوریتمی، قابل برنامه نویسی
- ② عمومی ← برای انواع سازه‌ها، الگوریتم مشابهی دارد.

③ مقایسه تحلیل ماتریسی و اجزای محدود

کاربرد:
- تحلیل ماتریسی ← منظور برای سازه‌های قابی
- اجزای محدود ← برای هر شکل سازه

تئوری:
- تحلیل ماتریسی ← رابطه دقیق نیرو-تغییرمکان براساس حل دقیق معادلات دیفرانسیل
- اجزای محدود ← فرض توابع تغییرمکان یا تنش و استفاده از روابط کار و انرژی

④ روش‌های سختی و نرمی

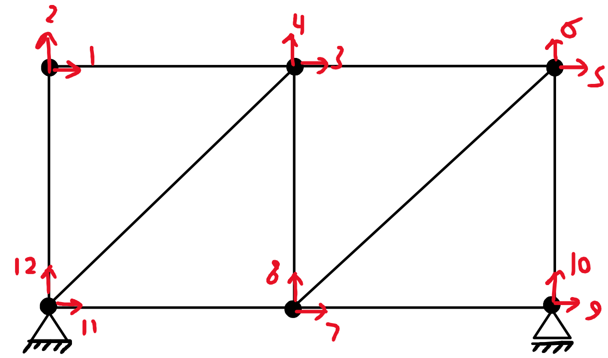
روش سختی:
- more systematic
- پیاده‌سازی کامپیوتری راحت‌تر

- روش سختی ✓
- روش نرمی

اکثر نرم‌افزارهای تجاری ← روش سختی (شیب-افت)

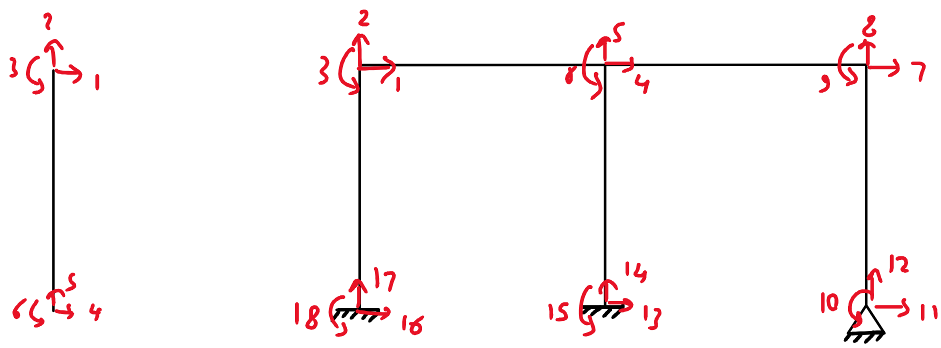
درجات آزادی

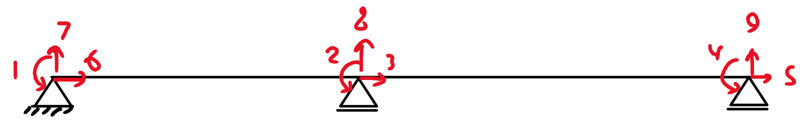
درجات آزادی



معادلات	مجهولات
$\Sigma M = 0$	δ , θ
$\Sigma F = 0$	

درجات آزادی { آزاد / مقید

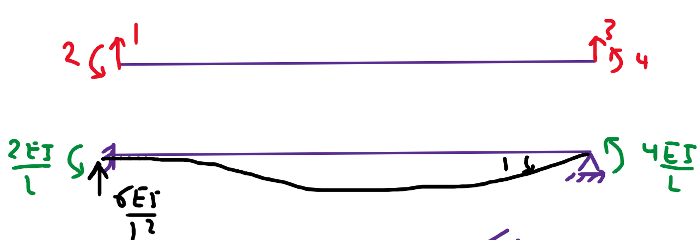




ماتریس سختی اعضا

ماتریس سختی، نیروهای گرهی را به تغییرمکان‌های گرهی پیوند می‌دهد.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & & & \\ k_{32} & & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}_{4\times1}$$



* هر درایه ماتریس سختی که با K_{ij} نشان داده می‌شود، عبارت است از نیروی لازم در درجه آزادی i برای ایجاد تغییرمکان واحد در درجه آزادی j ، هنگامی که از تغییرمکان سایر درجات آزادی جلوگیری شود.

* بنابراین برای پیدا کردن هر ستون ماتریس سختی کافی است که به درجه آزادی مربوط تغییرمکان واحد اعمال شود و نیروی کلیه درجات آزادی به دست آید؛ در حالی که تغییرمکان سایر درجات آزادی صفر است.

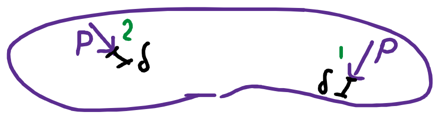
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & & & \\ k_{31} & & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$P_1 = k_{11} \times 1$

$P_2 = k_{21} \times 1$

$\vdots$

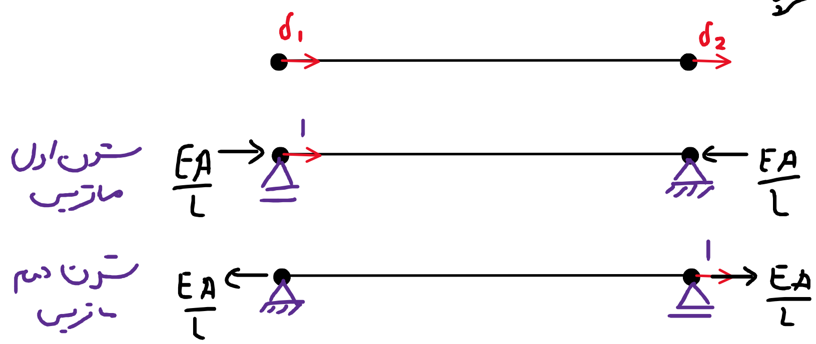
* مطابق قانون ماکسول، $k_{ij} = k_{ji}$ بوده و بنابراین ماتریس سختی متقارن است.



$k_{12} = k_{21}$

مثال: ماتریس سختی هر عضو را برای درجات آزادی نشان داده شده به دست آورید.

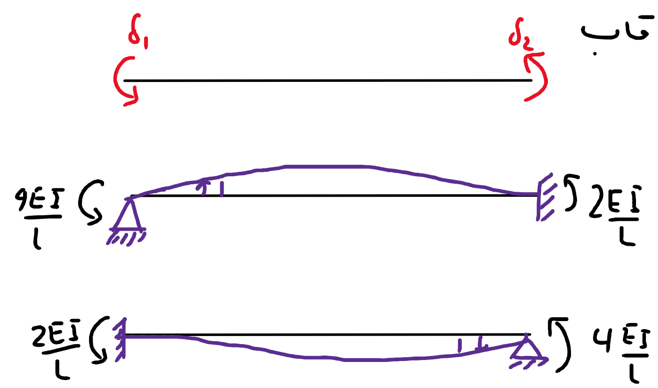
خرپا



$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\boxed{k = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

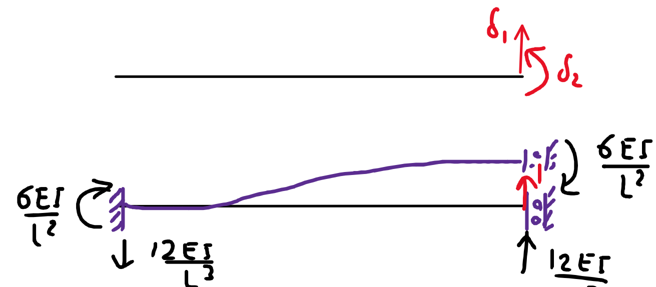
قاب



$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

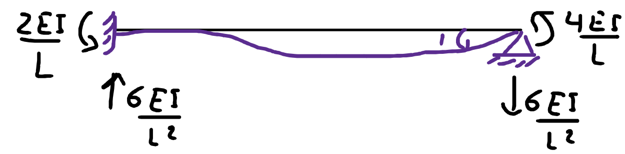
$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{k = \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$



$$M = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3\Delta}{L}\right) = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$$

$$\boxed{k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}$$

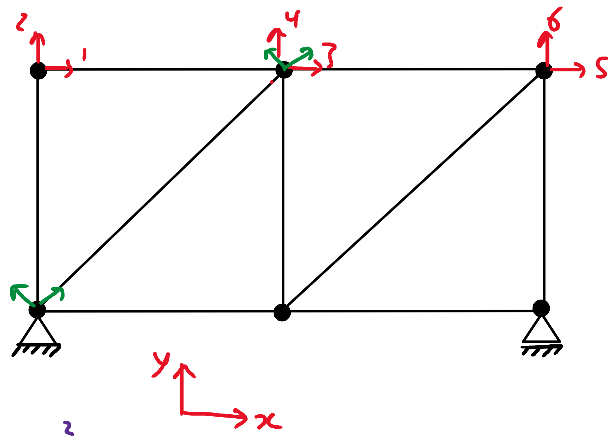


$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

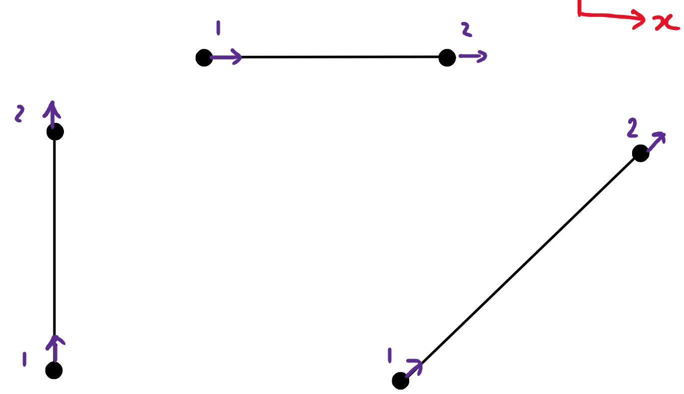
مختصات محلی و کلی

Local

Global



$$P_G = K_G \, \delta_G$$



$$K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$