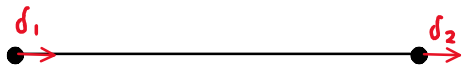
Matrix Analysis 2

Wednesday, July 17, 2024 11:47

تحلیل ماتریسی خرپاها

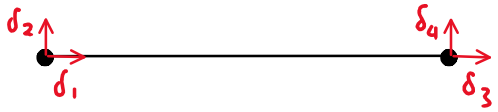
ماتریس سختی عضو خرپایی با ۲ درجه آزادی در مختصات محلی (Local)

$$k_L = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



ماتریس سختی عضو خرپایی با ۴ درجه آزادی در مختصات محلی (Local)

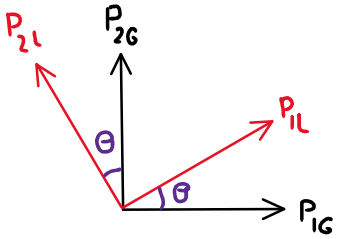
$$k_L = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



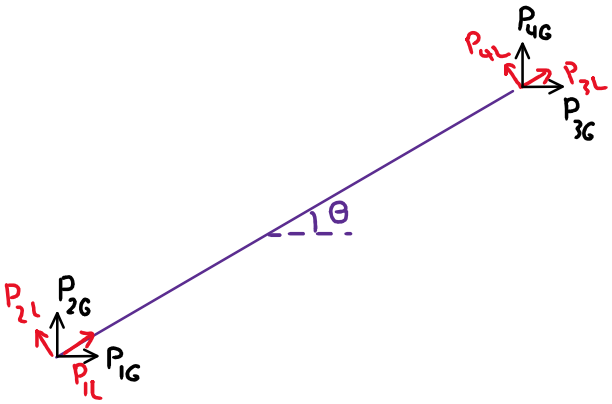
ماتریس مبدل یا ماتریس انتقال (R)

مختصات { کلی Global / محلی Local }

نقش انتقال کمیت ها را بین دستگاه مختصات محلی و کلی به عهده دارد.



$$\begin{cases} P_{1L} = P_{1G}\cos\theta + P_{2G}\sin\theta \\ P_{2L} = -P_{1G}\sin\theta + P_{2G}\cos\theta \\ P_{3L} = P_{3G}\cos\theta + P_{4G}\sin\theta \\ P_{4L} = -P_{3G}\sin\theta + P_{4G}\cos\theta \end{cases}$$



$$\begin{Bmatrix} P_{1L} \\ P_{2L} \\ P_{3L} \\ P_{4L} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right] \begin{Bmatrix} P_{1G} \\ P_{2G} \\ P_{3G} \\ P_{4G} \end{Bmatrix}$$

$$P_L = R\,P_G$$

$$\delta_L = R\,\delta_G$$

$$P_L = \underbrace{R}_{\text{ماتریس انتقال یا}} P_G$$

$P_L = R \; P_G$

ماتریس انتقال یا ماتریس دوران (Rotation)

* برای سادگی، می توان $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را با حروف C و S نشان داد. بنابراین ماتریس مدل عضو خرپایی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$R = \begin{bmatrix} R_J & 0 \\ 0 & R_J \end{bmatrix} \qquad R_J = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

* ماتریس مدل دارای خاصیت تعامد است.

$$R R^T = R^T R = I$$

$$R^{-1} = R^T$$

$$\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = I \qquad AX = b \rightarrow X = A^{-1} b$$

خلاصه

$$R = \begin{bmatrix} R_J & 0 \\ 0 & R_J \end{bmatrix} \qquad R_J = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

$$P_L = R \, P_G \qquad \delta_L = R \, \delta_G$$

$$P_G = R^T P_L \qquad \delta_G = R^T \delta_L$$

ماتریس سختی عضو در مختصات کلی (Global)

برای تشکیل ماتریس سختی کل سازه لازم است که ماتریس سختی کلیه اعضا در یک دستگاه مختصات مشترک نوشته شود تا امکان ترکیب آنها وجود داشته باشد.

به عبارت دیگر با تبدیل ماتریس سختی اعضا از مختصات محلی (local) به مختصات کلی (Global)، امکان ترکیب ماتریس سختی اعضا و تشکیل ماتریس سختی کل سازه فراهم می شود.

$$P_L = k_L \delta_L \rightarrow R^T P_L = R^T k_L R \, \delta_G \rightarrow P_G = \underbrace{R^T k_L R}_{k_G} \delta_G$$

$$* \; k_G = R^T k_L R \; *$$

ماتریس سختی عضو خرپایی در مختصات کلی (Global)

ماتریس سختی عضو خرپایی در مختصات کلی (Global)

$$K_G = \left[\begin{array}{cc|cc} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{array}\right] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{array}\right]$$

$$K_G = \left[\begin{array}{cc|cc} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{array}\right] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C & S & -C & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ \hline -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{array}\right]$$

$$k_G = \left[\begin{array}{c:c} K_J & -K_J \\ \hdashline -K_J & K_J \end{array}\right] \qquad k_J = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$