Matrix Analysis 12

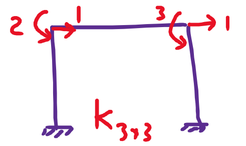
Tuesday, August 6, 2024 10:29

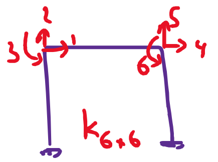
تحلیل ماتریسی سازه‌ها

پیرامون ماتریس سختی المان قاب

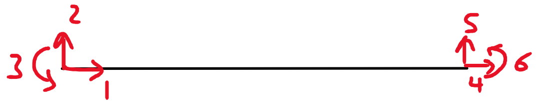
* در حل دستی به روش تحلیل ماتریسی، معمولا از تغییر طول محوری اعضا صرف نظر می‌شود که راه حل را کوتاه می‌کند ولی در حل با کامپیوتر، تغییر طول محوری اعضا لحاظ می‌شود.

* بنابراین در ادامه از ماتریس سختی اعضا فقط بر اساس تغییر شکل‌های خمشی استفاده می‌شود و از تغییر شکل‌های برشی و محوری صرف نظر می‌کنیم.



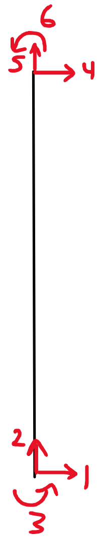


① عضو افقی



$$k_G = k_L = \begin{array}{cccc|c} \text{②} & \text{③} & \text{⑤} & \text{⑥} & \\ \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \text{②} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \text{③} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \text{⑤} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \text{⑥} \end{array}$$

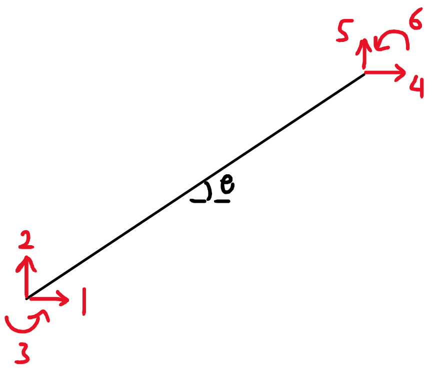
۲ عضو قائم



$$k_G = \begin{array}{cccc|cc} \delta & \theta & \delta & \theta & & \\ \text{①} & \text{③} & \text{④} & \text{⑥} & & \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \text{①} & \delta \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \text{③} & \theta \\ -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} & \text{④} & \delta \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \text{⑥} & \theta \end{array}$$

③ عضو مایل

$$K_G=\left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \\
s^2\frac{12EI}{L^3} & -cs\frac{12EI}{L^3} & -s\frac{6EI}{L^2} & -s^2\frac{12EI}{L^3} & cs\frac{12EI}{L^3} & -s\frac{6EI}{L^2} & \textcircled{1} \\
-cs\frac{12EI}{L^3} & c^2\frac{12EI}{L^3} & c\frac{6EI}{L^2} & cs\frac{12EI}{L^3} & -c^2\frac{12EI}{L^3} & c\frac{6EI}{L^2} & \textcircled{2} \\
-s\frac{6EI}{L^2} & c\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & s\frac{6EI}{L^2} & -c\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \textcircled{3} \\
\hline
-s^2\frac{12EI}{L^3} & cs\frac{12EI}{L^3} & s\frac{6EI}{L^2} & s^2\frac{12EI}{L^3} & -cs\frac{12EI}{L^3} & s\frac{6EI}{L^2} & \textcircled{4} \\
cs\frac{12EI}{L^3} & -c^2\frac{12EI}{L^3} & -c\frac{6EI}{L^2} & -cs\frac{12EI}{L^3} & c^2\frac{12EI}{L^3} & -c\frac{6EI}{L^2} & \textcircled{5} \\
-s\frac{6EI}{L^2} & c\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & s\frac{6EI}{L^2} & -c\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \textcircled{6}
\end{array}\right]$$



بردار بارگذاری P_f

با تقسیم بارهای وارده به سازه به بارهای گرهی (P_J) و بارهای میانی، می توان نوشت:

$$\begin{cases} M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right)+FEM_{AB} \\ M_{AC}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_C-\cancelto{0}{\frac{3\Delta}{L}}\right)+FEM_{AC} \end{cases}$$

$$\underset{\longrightarrow}{\Sigma M_B=0}\quad \overbrace{(\quad)\theta_A+(\quad)\theta_B+(}\quad\overbrace{)\Delta+FEM_{AB}}+FEM_{AC}-M_J=0$$

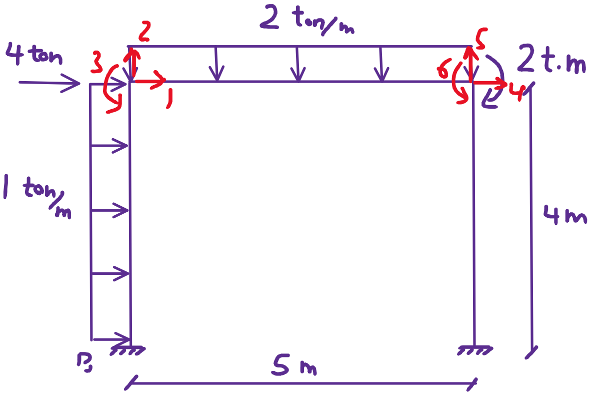
$$K\Delta=-FEM_{AB}-FEM_{AC}+M_J$$

$$k\delta+FER=P_J$$

$$\boxed{k\delta=P_J-FER}$$

مثال: بردار بارگذاری P_f را برای قاب شکل زیر به دست آورید.

$$P_f=\left\{\begin{array}{c} 4+\frac{1\times4}{2} \\ -\frac{2\times5}{2} \\ \frac{1\times4^2}{12}-\frac{2\times5^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{2\times5}{2} \\ -2+\frac{2\times5^2}{12} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 6 \\ -5 \\ -2.83 \\ 0 \\ -5 \\ 2.17 \end{array}\right\}\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{array}$$

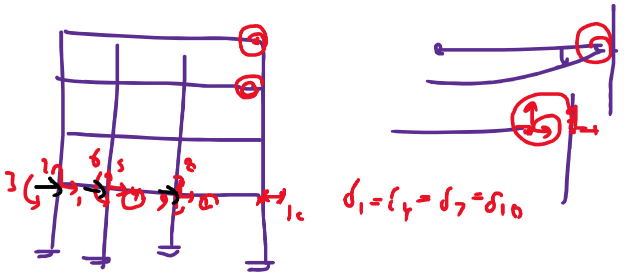


حذف درجات آزادی یکسان (equal DOF) در ماتریس سختی

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{4\times 4} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \boxed{\delta_4} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \delta_1 \end{matrix}$$

فرض

$\delta_1 = \delta_4$



$\delta_1 = \delta_4 = \delta_7 = \delta_{10}$

$$\begin{cases} P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_1 = (k_{11}+k_{14})\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 \\ P_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_1 = (k_{21}+k_{24})\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 \\ P_3 = k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_1 = (k_{31}+k_{34})\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 \\ P_4 = k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_1 = (k_{41}+k_{44})\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 + P_4 = (k_{11}+k_{14}+k_{41}+k_{44})\delta_1 + (k_{12}+k_{42})\delta_2 + (k_{13}+k_{43})\delta_3 \\ P_2 = (k_{21}+k_{24})\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 \\ P_3 = (k_{31}+k_{34})\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1+P_4 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}+k_{14}+k_{41}+k_{44} & k_{12}+k_{42} & k_{13}+k_{43} \\ k_{21}+k_{24} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31}+k_{34} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$$

* بنابراین اگر $\delta_1 = \delta_4$ باشد، برای تبدیل ماتریس سختی 4×4 به ماتریس سختی 3×3، ستون <u>4</u> را با ستون <u>1</u> و سطر <u>4</u> را با سطر <u>1</u> جمع می کنیم.