

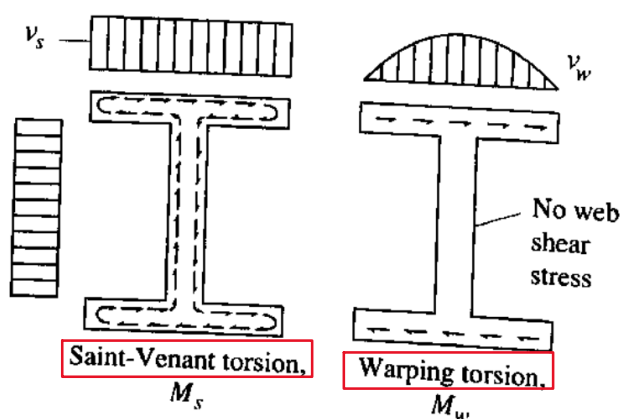
کمانش پیچشی ستون

مبانی نظری پیچش

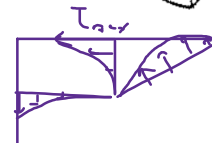
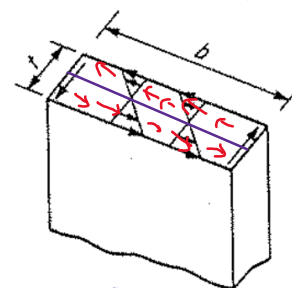
- ① Saint-Venant's torsion
② Warping torsion

1. پیچش سنت و ثان ← داشتیم در مقاومت مصالح
2. پیچش تابیدگی ← اینجا

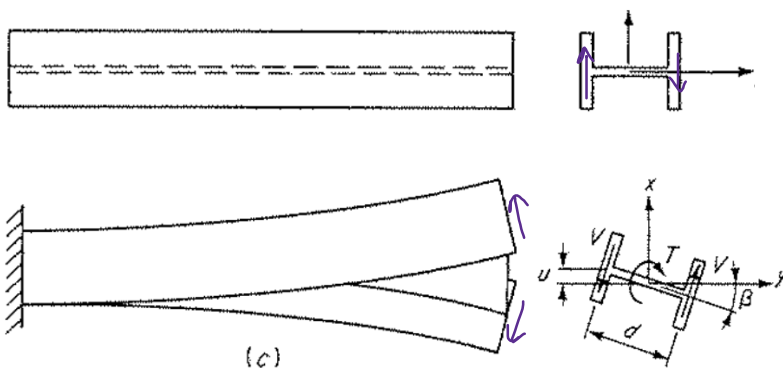
پیچش سنت و ثان و پیچش تابیدگی در مقطع I شکل



پیچش سنت و ثان
(پیچش خالص)



پیچش تابیدگی

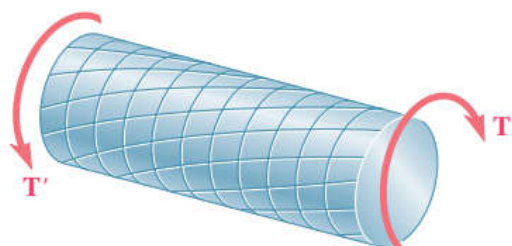
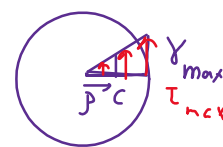


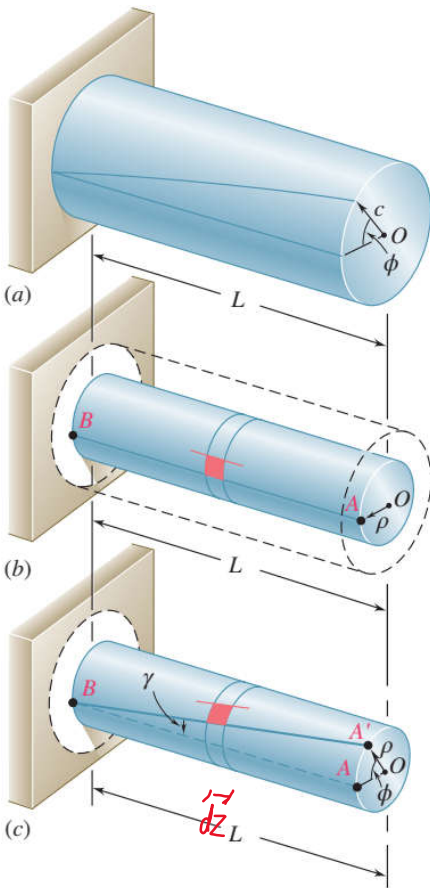
پیچش خالص مقاطع دایره‌ای و مستطیلی

* در مقطع دایره‌ای صغره، صغره باقی می‌ماند.

$$\rho\phi = \gamma L \rightarrow \gamma = \frac{\phi}{L} \rho$$

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{max} \rightarrow T = \frac{\rho}{c} T_{max}$$





$$T = \int \rho \tau dA = \int \rho \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA$$

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

J: ثابت پیچش

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_y + I_x$$

$$\int \rho^2 dA = \int \rho^2 2\pi \rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^c = \frac{\pi}{2} c^4$$

$$\phi = \frac{\gamma}{\rho} L = \frac{\tau}{G\rho} L = \frac{T\rho}{GJ} L = \frac{TL}{GJ}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$\rho d\phi = \gamma dz \rightarrow \frac{d\phi}{dz} = \frac{\gamma}{\rho}$$

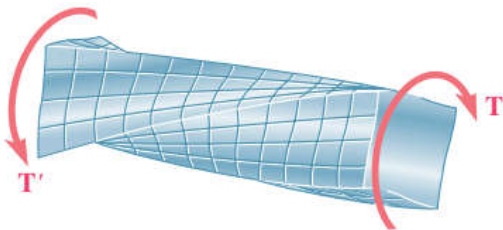
torsional curvature

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{T}{GJ}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

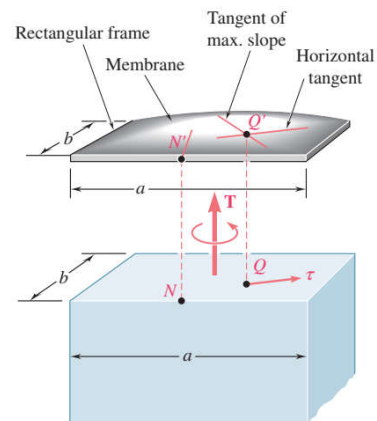
* در مقطع مستطیلی صفر، صفر باقی می ماند. تابیدگی (warping) یا اعوجاج داریم.



$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{T}{GJ} \rightarrow J = c_2 a b^3$$

$$b/4 \rightarrow \infty \rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$$



$$J = \sum \frac{1}{3} b t^3$$

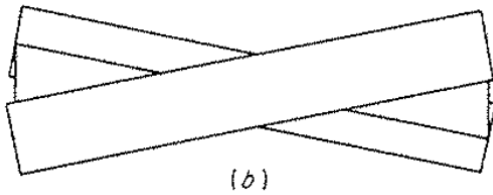
$$I_p = I_x + I_y$$

* در مقاطع جدار باز، J با I_p کاملاً متفاوت است.

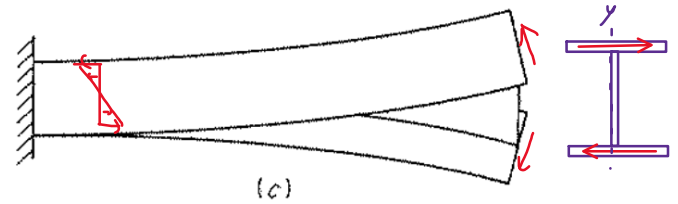
J: ثابت پیچش

I_p : ممان اینرسی قطبی

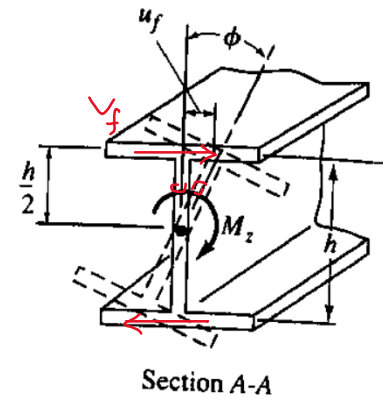
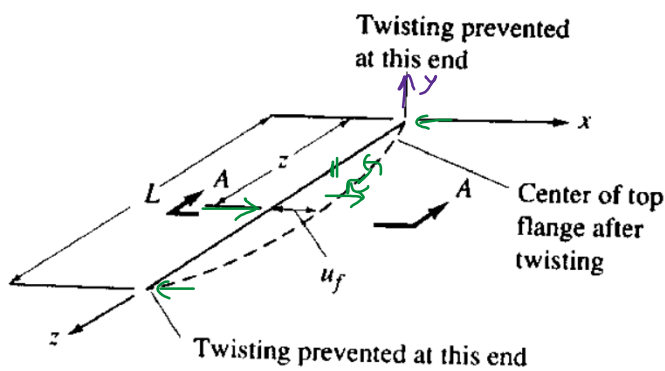
بجٹی تابیدگی (warping torsion)



free → uniform Warping



Supported → nonuniform Warping



$$\begin{cases} u = \frac{h}{2} \phi \\ M_f = EI_f u'' \rightarrow V_f = EI_f u''' \end{cases}$$

$$V_f = EI_f \frac{h}{2} \phi'''$$

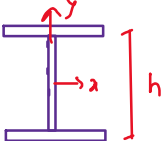
$$T_w = V_f h = E \frac{h^2}{2} I_f \phi'''$$

$$T_w = E \left(\frac{h^2}{2} I_f \right) \frac{d^3 \phi}{dz^3}$$

$$T_w = -E C_w \frac{d^3 \phi}{dz^3}$$

ثابت تابیدگی (C_w) Warping Constant

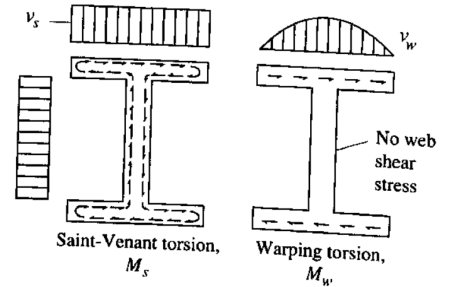
$$C_w = \frac{h^2}{2} I_f = \frac{h^2}{4} I_y$$



بجین کل (بجین سنت زمان + تابیدگی)

$$T = T_s + T_w = GJ\phi' - Ec_w\phi''$$

$$T = GJ \frac{d\phi}{dz} - Ec_w \frac{d^2\phi}{dz^2}$$



ثابت تابیدگی (C_w) Warping Constant

برای مقطع صلیبی

$$\begin{cases} u = r\phi \\ dM = E \left(dr \frac{t^3}{12} \right) u'' \rightarrow dv = E \left(\frac{t^3}{12} dr \right) u'' \end{cases}$$

$$dv = E \left(\frac{t^3}{12} dr \right) r\phi''$$

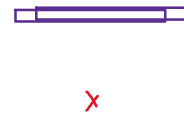
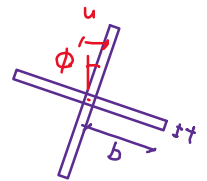
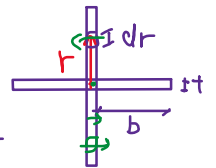
$$dT_w = r dv \rightarrow T_w = \int r dv = \int E \left(\frac{t^3}{12} \right) r^2 \phi'' dr = E \frac{t^3}{12} \phi'' \int r^2 dr$$

برای یک پل $T_w = E \left(\frac{t^3 b^3}{36} \right) \phi''$

$$C_w = \frac{A^3}{36}$$

برای کل مقطع

$$C_w = \frac{t^3 b^3}{9} = \frac{A^3}{9}$$



$$\frac{h^2}{2} I_x = \frac{h^2}{2} t b_{12}^3$$

$$\frac{A^3}{36} = \frac{t^3 b^3}{36} \equiv \circ$$

