

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = kx \quad ma = kx$$

$$F = kv \quad ma = kv$$

۱)  $a = f(t)$  شتاب تابع زمان

۲)  $a = f(s)$  شتاب تابع مکان

۳)  $a = f(v)$  شتاب تابع سرعت

۳ تیپ مسأله

① شتاب تابع زمان

$$a = f(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = f(t) \rightarrow \int_{v_i}^v dv = \int_{t_i}^t f(t) dt \rightarrow v \Big|_{v_i}^v = \int_{t_i}^t f(t) dt \rightarrow v = v_i + \int_{t_i}^t f(t) dt$$

$$\frac{ds}{dt} = v \rightarrow \int_{s_i}^s ds = \int_{t_i}^t v dt \rightarrow s = s_i + \int_{t_i}^t v dt$$

$$\frac{dv}{dt} = a \rightarrow \int_{v_i}^v dv = \int_{t_i}^t a dt \rightarrow v = v_i + at$$

حالت خاص: شتاب ثابت

$$\frac{ds}{dt} = v \rightarrow \int_{s_i}^s ds = \int_{t_i}^t (v_i + at) dt \rightarrow s = s_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2$$

② شتاب تابع مکان

$$a = f(s)$$

$$a ds = v dv \rightarrow \int_{s_i}^s f(s) ds = \int_{v_i}^v v dv \rightarrow \int_{s_i}^s f(s) ds = \frac{1}{2} (v^2 - v_i^2) \rightarrow v^2 = v_i^2 + 2 \int_{s_i}^s f(s) ds$$

$$v = g(s) \rightarrow \frac{ds}{dt} = g(s) \rightarrow \int_{s_i}^s \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_i}^t dt = t \rightarrow t = \int_{s_i}^s \frac{ds}{g(s)}$$

③ شتاب تابع سرعت

$$a = f(v)$$

روش اول

$$\frac{dv}{dt} = f(v) \rightarrow \int_{v_i}^v \frac{dv}{f(v)} = \int_{t_i}^t dt \rightarrow t = \int_{v_i}^v \frac{dv}{f(v)}$$

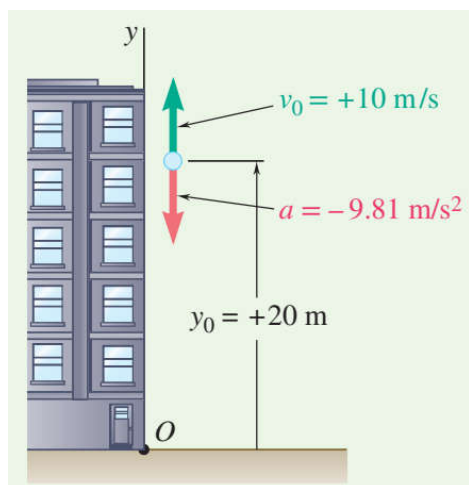
$$v = g(t) \rightarrow \frac{ds}{dt} = g(t) \rightarrow s = s_i + \int_{t_i}^t g(t) dt$$

روش دوم

$$a ds = v dv \rightarrow f(v) ds = v dv \rightarrow \int_{s_i}^s ds = \int_{v_i}^v \frac{v}{f(v)} dv \rightarrow s = s_i + \int_{v_i}^v \frac{v}{f(v)} dv$$

$$v = g(s) \rightarrow \frac{ds}{dt} = g(s) \rightarrow \int_{s_i}^s \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_i}^t dt = t \rightarrow t = \int_{s_i}^s \frac{ds}{g(s)}$$

مثال: توپی را از ارتفاع 20 m با سرعت 10 m/s به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:



(الف) سرعت و ارتفاع توپ بر حسب زمان

(ب) بالاترین ارتفاعی که توپ به آن می‌رسد و زمان مربوط به آن

(ج) زمانی که توپ به زمین برخورد می‌کند و سرعت توپ در زمان برخورد

$$v = v_0 + at = 10 - 9.81t$$

(الف)

$$y = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 20 + 10t - \frac{1}{2} \times 9.81t^2$$

$$v = 10 - 9.81t$$

$$y = -4.905t^2 + 10t + 20$$

(ب)

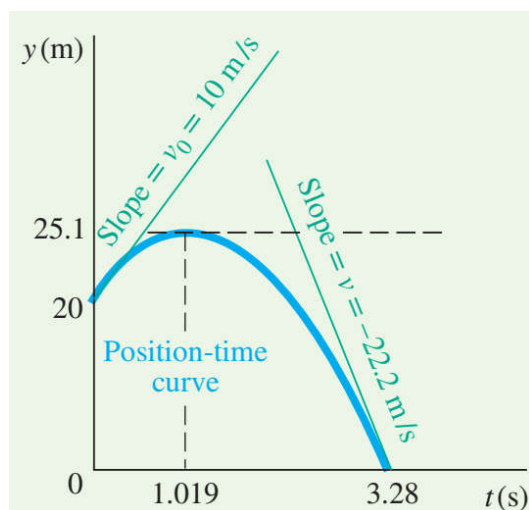
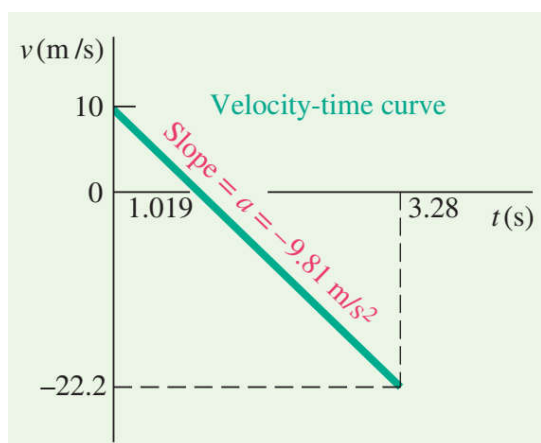
$$v = 0 \rightarrow 10 - 9.81t = 0 \rightarrow t = 1.019 \text{ s}$$

$$y = -4.905(1.019^2) + 10(1.019) + 20 = 25.1 \text{ m} \rightarrow y = 25.1 \text{ m}$$

$$y = 0 \rightarrow -4.905t^2 + 10t + 20 = 0 \rightarrow t = \frac{-10 \pm 22.19}{-9.81} = 3.28 \text{ s} \rightarrow t = 3.28 \text{ s}$$

$$v = 10 - 9.81(3.28) = -22.2 \text{ m/s} \rightarrow v = 22.2 \text{ m/s} \downarrow$$

(ج)

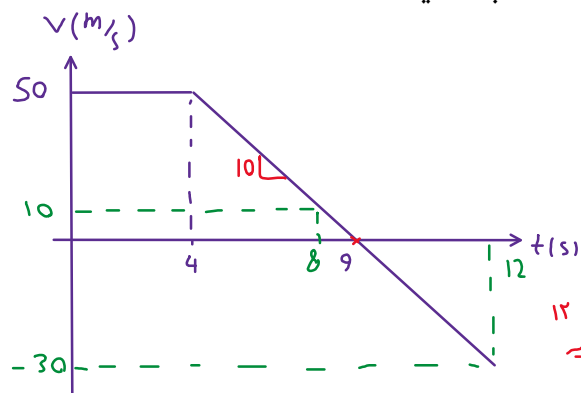


مثال: نقطه مادی از مبدأ مختصات با سرعت اولیه  $v_0 = 50 \text{ m/s}$  در امتداد محور  $x$  به حرکت در می‌آید. ذره در ۴ ثانیه اول شتاب ندارد. از آن پس تحت اثر نیرویی، شتاب کندشونده ثابت  $a = 10 \text{ m/s}^2$  می‌گیرد.

(الف) سرعت و مکان ذره را در زمان‌های ۸ و ۱۲ ثانیه به دست آورید.

(ب) مسافت طی شده بین ۴ و ۱۲ ثانیه چقدر است؟

(ج) دورترین نقطه در جهت مثبت محور  $x$  که ذره می‌تواند به آن برسد، محاسبه کنید.



$$v(8) = 50 - 10(4) = 10 \rightarrow \boxed{v(8) = 10 \uparrow} \quad (\text{الف})$$

$$v(12) = 50 - 10(8) = -30 \rightarrow \boxed{v(12) = 30 \downarrow}$$

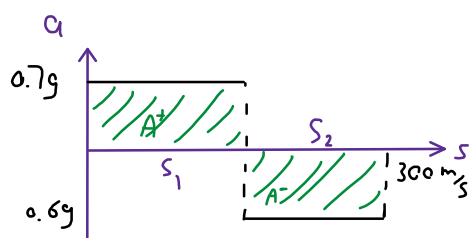
$$L = \frac{1}{2} \times 50 \times 4 + \frac{1}{2} \times 30 \times 3 = 170 \text{ m} \rightarrow \boxed{L = 170 \text{ m}} \quad (\text{ب})$$

$$S(9) = 50 \times 4 + \frac{1}{2} \times 50 \times 5 = 325 \text{ m} \rightarrow \boxed{S_{\text{max}} = 325 \text{ m}} \quad (\text{ج})$$

مثال: موتور سیکلتی از حالت سکون از نقطه A حرکت کرده و پس از پیمودن 300 m در یک مسیر مستقیم به نقطه B می‌رسد و متوقف می‌شود. اگر ماکزیمم شتاب تندشونده موتور 0.7g و ماکزیمم شتاب کند شونده موتور 0.6g باشد؛ مطلوب است:

(الف) کوتاهترین زمان ممکن جهت پیمودن این مسافت

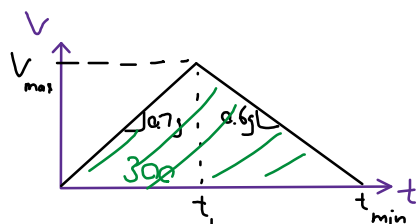
(ب) ماکزیمم سرعتی که موتور به آن می‌رسد.



$$a ds = v dv \rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int a ds$$

$$\int_0^{300} a ds = 0 \rightarrow A^+ = A^- \rightarrow 0.7g S_1 = 0.6g S_2 \rightarrow \boxed{S_2 = \frac{7}{6} S_1}$$

$$S_1 + S_2 = 300 \rightarrow S_1 + \frac{7}{6} S_1 = 300 \rightarrow \boxed{S_1 = 138.5 \text{ m}} \quad S_2 = 161.5 \text{ m}$$



$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int a ds \rightarrow \frac{1}{2}(v_{\text{max}}^2 - 0) = \int_0^{138.5} a ds = 0.7g \times 138.5$$

$$\boxed{V_{\text{max}} = 43.8 \text{ m/s}}$$

$$S - S_1 = \int v dt \rightarrow 300 = \frac{1}{2} V_{\text{max}} t_{\text{min}} \rightarrow \boxed{t_{\text{min}} = 13.8 \text{ s}}$$