

مثال: لغزنده‌ای در هادی افقی شکل زیر با شتاب $a = -k^2 s$ حرکت می‌کند. اگر در هنگام عبور از نقطه میانی که در آن $t=0$ و $s=0$ است، سرعت برابر v_0 در راستای s باشد؛ جابه‌جایی و سرعت را برحسب زمان تعیین کنید.

$$a = -k^2 s$$

رشتی اول:

$$a ds = v dv$$

$$\int_0^s -k^2 s ds = \int_{v_0}^v v dv$$

$$-\frac{k^2}{2} s^2 \Big|_0^s = \frac{1}{2} v^2 \Big|_{v_0}^v \rightarrow -\frac{k^2}{2} s^2 = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}$$

$\hookrightarrow \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2} \rightarrow \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = \int_0^t dt \rightarrow \frac{1}{k} \int_0^s \frac{k ds}{v_0 \sqrt{1 - (\frac{ks}{v_0})^2}} = t \rightarrow \frac{1}{k} \sin^{-1} \left(\frac{ks}{v_0} \right) \Big|_0^s = t$$

$$\frac{ks}{v_0} = \sin(kt) \rightarrow \boxed{S = \frac{v_0}{k} \sin kt}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow$$

$$\boxed{v = v_0 \cos kt}$$

$$a = -k^2 s$$

رشتی دوم: معادله دینامیک

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -k^2 s \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 s = 0 \rightarrow \text{معادله کلم} \quad t^2 + k^2 = 0 \rightarrow t = \pm ki$$

$$S = A \sin kt + B \cos kt \quad \text{ایمال شرایط مرزی}$$

$$S(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$v(0) = v_0 \rightarrow v = \frac{ds}{dt} = A k \cos kt \rightarrow A k = v_0 \rightarrow A = \frac{v_0}{k}$$

$$\boxed{S = \frac{v_0}{k} \sin kt}$$

$$\boxed{v = v_0 \cos kt}$$

مثال: شتاب ذره‌ای با رابطه $a = 0.6(1 - kv)$ تعریف می‌شود که در آن k ثابت است. می‌دانیم که ذره در $t=0$ و $x=6$ از حالت سکون به حرکت در می‌آید و در $t=20$ s سرعت آن به 6 m/s می‌رسد. مطلوب است:

$$\begin{cases} x(0) = 6 \\ v(0) = 0 \\ \checkmark v(20) = 6 \end{cases}$$

(الف) مکان ذره وقتی $v=7.5 \text{ m/s}$

(ب) سرعت ماکزیمم ذره

$$a = 0.6(1 - kv)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0.6(1 - kv) \rightarrow \int_0^v \frac{-k dv}{0.6(1 - kv)} = \int_0^t dt \rightarrow \frac{-3}{5k} \ln(1 - kv) \Big|_0^v = t \Big|_0^t$$

$$\frac{-3}{5k} (\ln(1 - kv) - 0) = t \rightarrow 1 - kv = e^{-0.6kt} \rightarrow v = \frac{1}{k} (1 - e^{-0.6kt})$$

$$v(20) = 6 \rightarrow 6 = \frac{1}{k} (1 - e^{-0.6k(20)}) \rightarrow 6k = 1 - e^{-12k} \rightarrow e^{-12k} + 6k - 1 = 0$$

تقریباً

$$6k - 1 \approx 0 \rightarrow k \approx \frac{1}{6}$$

$$f = e^{-12k} + 6k - 1$$

کارا بہ دست آ رہا کہ $f = 0$ شد

k	f
1/6	0.135

0.1	-0.1
-----	------

0.13	-0.01
------	-------

0.133	0.0007 ≈ 0
-------	--------------------

Using Excel goal seek $\rightarrow k = 0.13283$

$$v = \frac{1}{k} (1 - e^{-0.6kt}) \rightarrow v = 7.53 (1 - e^{-0.08t})$$

روز اول: از تابع v معلوم است کہ v_{max} و قیامت آن کی افتد کہ

$$t \rightarrow \infty \rightarrow v_{max} = 7.53$$

$t \rightarrow$

$$a = 0 \rightarrow 0.6(1 - kv) = 0 \rightarrow v_{max} = \frac{1}{k} = 7.53$$

روز دوم:

$$v = 7.53 (1 - e^{-0.08t}) \rightarrow \frac{ds}{dt} = 7.53 (1 - e^{-0.08t}) \rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t 7.53 (1 - e^{-0.08t}) dt$$

$$s - 0 = \int_0^t (7.53 - 7.53 e^{-0.08t}) dt = 7.53t + 94.12 e^{-0.08t} \Big|_0^t = 7.53t + 94.12 e^{-0.08t} - 94.12$$

$$s = 94.12 e^{-0.08t} + 7.53t - 88.12$$

$$v = 7.53 (1 - e^{-0.08t}) = 7.5 \rightarrow 0.03 = 7.53 e^{-0.08t} \rightarrow \ln\left(\frac{0.03}{7.53}\right) = -0.08t \rightarrow t = \underline{\underline{69.1s}}$$

$$s(69.1) = 432.6 \text{ m}$$

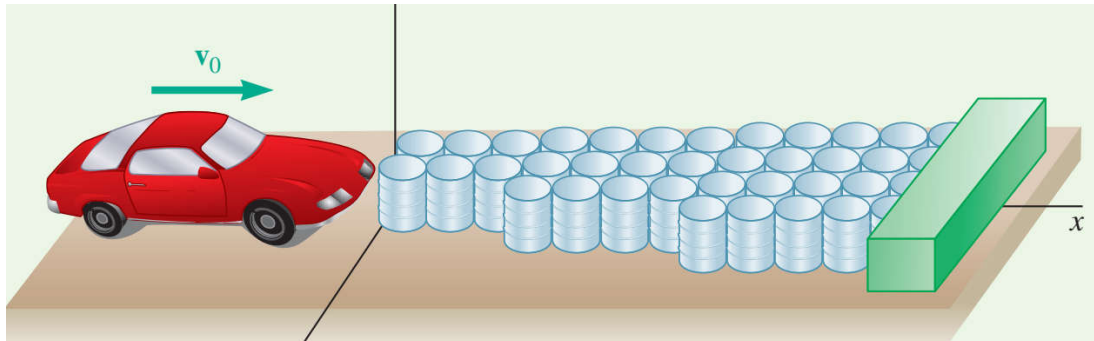
$$a ds = v dv$$

$$0.6(1 - kv) ds = v dv \rightarrow \int_6^5 ds = \int_3^5 \frac{v}{(1 - kv)} dv \rightarrow \text{دست می آید}$$

چون سرعت در یک مکان خاص را نداریم
بلکه سرعت در زمان $t = 2$ داده شده

← این روش جواب می دهد

مثال: ماشینی با سرعت 66 ft/s به سیستم محافظ تصادف یک بزرگراه برخورد می کند و پس از برخورد به محافظ، شتابی کندشونده متناسب با تغییر مکان به صورت $a = -60\sqrt{x}$ می گیرد. فاصله ای را که اتومبیل قبل از سکون کامل در داخل سیستم محافظ نفوذ می کند، تعیین کنید و زمان مربوطه را به دست آورید.



$$a = -60\sqrt{x}$$

$$a dx = v dv \rightarrow \int_0^x -60\sqrt{x} dx = \int_{v_0}^v v dv \rightarrow -40x^{3/2} \Big|_0^x = \frac{1}{2}v^2 \Big|_{v_0}^v$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -40x^{3/2} \rightarrow x = \left(-\frac{1}{80}(v^2 - v_0^2) \right)^{2/3}$$

$$x = \left[-\frac{1}{80}(0 - 66^2) \right]^{2/3} = 14.3658 \text{ ft} \rightarrow x = 14.37 \text{ ft}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 80x^{3/2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 80x^{3/2}} \rightarrow \int_0^{14.37} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 80x^{3/2}}} = \int_0^t dt$$

حل بسته Closed-form برای این انتگرال
وجود ندارد. ما داریم به صورت عددی حل کنیم.

$$t = \int_0^{14.3658} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 80x^{3/2}}} dx$$

$$\text{Excel} \rightarrow t = 0.375 \text{ s}$$

